Clase de pesos multilineales asociados a propiedades de continuidad de conmutadores de operadores fraccionarios generalizados

Fabio Berra[1] **- Gladis Pradolini**[1] **- Jorgelina Recchi**[2,3]

(1) Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral (UNL)-CONICET, Santa Fe, Argentina.
(2)Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur (UNS), Bahía Blanca, Argentina.
(3) Instituto de Matemática(INMABB), Universidad Nacional del Sur(UNS)-CONICET, Bahía Blanca, Argentina.

junio 2023

Operadores de tipo fraccionario

Definimos ***el operador fraccionario de tipo convolución*** T_α, *con* $0 < \alpha < n$,

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x-y) f(y) dy,$$

donde K_α *verifica ciertas condiciones de tamaño y suavidad.*

Ejemplo

Cuando $K_\alpha(x) = |x|^{\alpha - n}$, $T_\alpha f(x) = I_\alpha f(x)$, *el operador integral fraccionario clásico.*

Motivación: Integral fraccionaria

- H-L en dimensión uno y para $f \in L^p$, $1 < p < 1/\alpha$ y $0 < \alpha < 1$, probaron: $I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ para $1/q = 1/p - \alpha$.
- Para dimensión n fue probado por Sobolev y para pesos potencias por Stein-Weiss.
- En el caso limite $p = n/\alpha$, con $0 < \alpha < n$

$$I_\alpha : L^p \to BMO$$

y para $n/\alpha < p < n/(\alpha - 1)^+$,

$$I_\alpha : L^p \to \Lambda(\delta)$$

donde $\delta = \alpha - n/p$.

Motivación

Sea $0 < \alpha < n$ *y* $1/q = 1/p - \alpha/n$. *Un peso* $v \in A_{p,q}$ *si*

$$\left(\frac{v^{-q}(B)}{|B|}\right)^{1/q}\left(\frac{v^{p'}(B)}{|B|}\right)^{1/p'} \leq C$$

M-W en 1974 probaron que

- $\|I_\alpha/v\|_q \leq C\|f/v\|_p \Leftrightarrow v \in A_{p,q}$

Para el caso límite $p = n/\alpha$ y $q = \infty$

- $I_\alpha : L^{n/\alpha}(1/v) \to BMO_v \Leftrightarrow v \in A_{n/\alpha,\infty} \Leftrightarrow v^{(n/\alpha)'} \in A_1$

En 1984, Harboure-Macias-Segovia estudiaron acotaciones para I_α y M_α para pares de pesos (w, v)

- $\|I_\alpha f\|_{L^q(w)} \leq C\|f\|_{L^p(v)}$

dando los rangos adecuados α, p y q en los cuales habia soluciones no triviales.

Motivación

En los 90', Sawyer y Wheeden, probaron que para $1 < p < q < \infty$,

- $I_\alpha : L^p(1/v) \to L^q(1/w)$ vale sí y solo sí $(w, v) \in A(p, q)^\alpha$

que es:

$$|B|^{\alpha/n-1} \left(\int_B w^{-q} \right)^{1/q} \left(\int_B v^{p'} \right)^{1/p'} \leq C$$

Buscando trabajar en simultáneo con:

- Estimaciones en norma p.
- Estimaciones en norma Lipschitz.

Peetre (1968) considera la teoría de los espacios $\mathcal{L}_{p,\lambda}$. Para p fijo, estas familias coinciden con espacios como L^p, BMO, Morrey, etc según el λ.

Siguiendo esa idea, Harboure-Salinas-Viviani para el caso de un peso y $p = 1$ introducen versiones de espacios tipo Lipschitz y clases de pesos asociadas con la acotación de I_α.

Motivación

En el caso de pares de pesos, Pradolini,

- Caracteriza los pares (w, v) para los cuales el I_α está acotado de $L^p(1/v)$ en espacios tipo Lipschitz adecuados.
- Determina los rangos óptimos sobre los cuales se encuentran pares de pesos no triviales.

Pradolini define la siguiente clase de pesos:

Sea $0 < \alpha < n$, $\delta \in \mathbb{R}$ *y* $1 < r < \infty$. $(w, v) \in \overline{\mathbb{H}}(r, \alpha, \delta)$ *si verifica:*

$$\frac{\|(1/w)\chi_B\|_\infty}{|B|^{(\delta-1)/n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^{r'}(y)}{(|B|^{1/n} + |x_B - y|)^{r'(n-\alpha+1)}}\, dy \right)^{1/r'} \leq C$$

y encuentra regiones donde estos pesos son no triviles.

Motivación

- Para esta cierta clase Lipschitz $\overline{\mathcal{L}}_w(\delta)$ y para esta clase de pesos $\overline{\mathbb{H}}(r,\alpha,\delta)$, Pradolini prueba:

Si $0<\alpha<n$, $\delta\in\mathbb{R}$ *y* $1\leq r\leq\infty$. *Son equivalentes:*

1. $I_\alpha : L^r(1/v) \to \overline{\mathcal{L}}_w(\delta)$
2. $(w,v)\in\overline{\mathbb{H}}(r,\alpha,\delta)$

En [PR] y en [PRR]

- Obtuvimos estimaciones con dos pesos para el Conmutador tanto de **Integrales Singulares** como de **Operadores Fraccionarios**, entre espacios de L^r y espacios de tipo Lipschitz.
- Encontramos la clase de pesos adecuada para las acotaciones.
- Estudiamos los rangos de los parámetros para la existencia de pares de pesos no triviales.

Motivación: Conmutadores

- *Sea T_α un operador de tipo fraccionario.*

Definimos el conmutador de T_α con símbolo $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ como:

$$[b, T_\alpha]f = b\,T_\alpha f - T_\alpha(bf).$$

Para **el conmutador de primer orden** con símbolo $b \in BMO$, $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$, se sabe que si $w \in A_{p,q}$:

- $[b, I_\alpha] : L^p(w) \to L^q(w)$

Sin embargo, para los casos límites con $w \equiv 1$ y $b \in BMO$:

- $[b, I_\alpha] : L^{n/\alpha}(\mathbb{R}) \to BMO \Leftrightarrow b$ es constante. (Harboure-Segovia-Torrea)

Dado $0 < \delta < 1$, diremos que $\boxed{b \in \Lambda(\delta)}$, *si $\exists\ C$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:*

$$|b(x) - b(y)| \leq\ C\,|x - y|^{\delta}$$

A la menor constante C, la notaremos como $\|b\|_{\Lambda(\delta)}$.

Operadores fraccionarios generalizados

Consideramos $0 < \alpha < mn$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

- **Operador integral fraccionaria multilineal**

$$I_\alpha^m \vec{f}(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \frac{\prod_{i=1}^m f_i(y_i)}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{mn-\alpha}} \, d\vec{y}$$

- **Operadores fraccionarios generalizados**

$$T_\alpha^m \vec{f}(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K_\alpha(x, \vec{y}) \prod_{i=1}^m f_i(y_i) \, d\vec{y}$$

con K_α un núcleo que cumple cirta condición de tamaño:

$$|K_\alpha(x, \vec{y})| \lesssim \frac{1}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{mn-\alpha}} \tag{1}$$

y también de suavidad:

$$|K_\alpha(x, \vec{y}) - K_\alpha(x', \vec{y})| \lesssim \frac{|x - x'|^\gamma}{(\sum_{i=1}^m |x - y_i|)^{mn-\alpha+\gamma}}, \tag{2}$$

para algún $0 < \gamma \leq 1$, siempre que $\sum_{i=1}^m |x - y_i| > 2|x - x'|$

Conmutadores de orden superior de T_α^m

Sea $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ un símbolo multilineal, con $b_i \in L^1_{\text{loc}}$ para cada i

- **Conmutador Suma**

$$T^m_{\alpha,\boldsymbol{b}}\vec{f} = \sum_{j=1}^{m} T^m_{\alpha,b_j}\vec{f},$$

donde

$$T^m_{\alpha,b_j}\vec{f} = [b_j, T^m_\alpha]_j\vec{f} = b_j T^m_\alpha \vec{f} - T^m_\alpha((f_1, \ldots, b_j f_j, \ldots, f_m))$$

- **Conmutador Producto**, definido iterativamente por

$$\mathcal{T}^m_{\alpha,\boldsymbol{b}}\vec{f} = [b_m, \ldots [b_2, [b_1, T^m_\alpha]_1]_2 \ldots]_m\vec{f}$$

Usando la representación integral de T^m_α tenemos

$$T^m_{\alpha,\boldsymbol{b}}\vec{f}(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{(\mathbb{R}^n)^m} (b_j(x) - b_j(y_j))K_\alpha(x,\vec{y}) \prod_{i=1}^{m} f_i(y_i)\, d\vec{y}$$

y

$$\mathcal{T}^m_{\alpha,\boldsymbol{b}}\vec{f}(x) = \int_{(\mathbb{R}^n)^m} K_\alpha(x,\vec{y}) \prod_{i=1}^{m} (b_i(x) - b_i(y_i)) f_i(y_i)\, d\vec{y}$$

Clase de pesos $\mathbb{H}_m(\vec{p},\beta,\tilde{\delta})$

- $m \in \mathbb{N}$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$ un vector de exponentes, con $1 \le p_i \le \infty$ para cada i
- $\delta, \tilde{\delta}$ constantes reales
- $\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i$, con $0 < \beta_i < n$ para cada i
- $(w, \vec{v})$ par ordenado de pesos, con $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$

$(w,\vec{v}) \in \mathbb{H}_m(\vec{p},\beta,\tilde{\delta})$ *si existe* $C > 0$ *tal que*

$$\frac{\|w\mathcal{X}_B\|_\infty}{|B|^{(\tilde{\delta}-\delta)/n}} \prod_{i=1}^m \left\| \frac{v_i^{-1}}{(|B|^{1/n} + |x_B - \cdot|)^{n-\beta_i+\delta/m}} \right\|_{p_i'} \le C \tag{3}$$

vale para toda bola $B = B(x_B, R) \subset \mathbb{R}^n$

- Variantes para $m = 1$ fueron introducidas en [Pr] y [PRR]
- Cuando $p_i = 1$ el factor correspondiente se interpreta como

$$\left\| \frac{v_i^{-1}}{(|B|^{1/n} + |x_B - \cdot|)^{n-\beta_i+\delta/m}} \right\|_\infty$$

Clase de pesos $\mathbb{H}_m(\vec{p}, \beta, \tilde{\delta})$

- Si $\mathcal{I}_1 = \{1 \le i \le m : p_i = 1\}$ e $\mathcal{I}_2 = \{1 \le i \le m : p_i > 1\}$, de (3) se obtienen

Condición local

$$\frac{\|w\mathcal{X}_B\|_\infty}{|B|^{\tilde{\delta}/n+1/p-\beta/n}} \prod_{i\in\mathcal{I}_1} \|v_i^{-1}\mathcal{X}_B\|_\infty \prod_{i\in\mathcal{I}_2} \left(\frac{1}{|B|}\int_B v_i^{-p_i'}\right)^{1/p_i'} \le C, \tag{4}$$

donde $1/p = \sum_{i=1}^m 1/p_i$, y también

Condición global

$$\frac{\|w\mathcal{X}_B\|_\infty}{|B|^{\frac{(\tilde{\delta}-\delta)}{n}}} \prod_{i\in\mathcal{I}_1} \left\| \frac{v_i^{-1}\mathcal{X}_{\mathbb{R}^n\setminus B}}{|x_B - \cdot|^{n-\beta_i+\frac{\delta}{m}}} \right\|_\infty \prod_{i\in\mathcal{I}_2} \left(\int_{B^c} \frac{v_i^{-p_i'}(y)}{|x_B - y|^{(n-\beta_i+\frac{\delta}{m})p_i'}}\, dy\right)^{\frac{1}{p_i'}} \le C \tag{5}$$

donde $B^c = \mathbb{R}^n \setminus B$.

Algunas propiedades de $\mathbb{H}_m(\vec{p}, \beta, \tilde{\delta})$

- Si $w = \prod_{i=1}^m v_i$ y $\tilde{\delta} = \beta - n/p$, (4) establece que $\vec{v} \in A_{\vec{p},\infty}$

$$[\vec{v}]_{A_{\vec{p},\infty}} = \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \left\| \mathcal{X}_B \prod_{i=1}^m v_i \right\|_\infty \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{|B|} \int_B v_i^{-p_i'} \right)^{1/p_i'} < \infty$$

Condición global

- $0 < \beta < mn$, $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}$, $\vec{p}$ vector de exponentes
- $(w, \vec{v})$ satisface $v_i^{-1} \in \mathrm{RH}_\infty$ para $i \in \mathcal{I}_1$ y $v_i^{-p_i'}$ es duplicante para $i \in \mathcal{I}_2$

Entonces $\mathbb{H}_m(\vec{p}, \beta, \tilde{\delta})$ es equivalente a la Condición global.

Condición global

$$\frac{\|w\mathcal{X}_B\|_\infty}{|B|^{\frac{(\tilde{\delta}-\delta)}{n}}} \prod_{i \in \mathcal{I}_1} \left\| \frac{v_i^{-1} \mathcal{X}_{\mathbb{R}^n \setminus B}}{|x_B - \cdot|^{n-\beta_i+\frac{\delta}{m}}} \right\|_\infty \prod_{i \in \mathcal{I}_2} \left(\int_{B^c} \frac{v_i^{-p_i'}(y)}{|x_B - y|^{(n-\beta_i+\frac{\delta}{m})p_i'}} \, dy \right)^{\frac{1}{p_i'}} \leq C$$

Algunas propiedades de $\mathbb{H}_m(\vec{p}, \beta, \tilde{\delta})$

Condición local

- $0 < \beta < mn$, $\beta_i = \beta/m$ para cada i, $\vec{p}$ vector de exponentes
- $\delta \in \mathbb{R}$, $\tilde{\delta} < \tau = (\beta - mn)(1 - 1/m) + \delta/m$

Entonces la condición local (4) implica la global (5)

Caso de pesos relacionados

- $0 < \beta < mn$, $\tilde{\delta} \in \mathbb{R}$, $\vec{p}$ vector de exponentes
- $(w, \vec{v}) \in \mathbb{H}_m(\vec{p}, \beta, \tilde{\delta})$ con $w = \prod_{i=1}^m v_i$

Entonces $\tilde{\delta} = \beta - n/p$. Como consecuencia, si $w = \prod_{i=1}^m v_i$ y $\tilde{\delta} < \tau$ $(w, \vec{v}) \in \mathbb{H}_m(\vec{p}, \beta, \tilde{\delta})$ si y solo si $\vec{v} \in A_{\vec{p},\infty}$

Clase Lipschitz $\mathbb{L}_w(\delta)$

- w un peso, $\delta \in \mathbb{R}$ y $f \in L^1_{\text{loc}}$.

Decimos que $f \in \mathbb{L}_w(\delta)$ *si*

$$\|f\|_{\mathbb{L}_w(\delta)} := \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{\|w\mathcal{X}_B\|_\infty}{|B|^{1+\delta/n}} \int_B |f(x) - f_B| \, dx < \infty,$$

donde $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f$.

- Cuando $\delta = 0$, coincide con las versiones pesadas de BMO_w introducidas por M-W en [MW1].
- $\mathbb{L}_w(\delta)$ coincide con $\overline{\mathcal{L}}_{1/w}(\delta)$ introducida por Pradolini.
- Para $0 < \delta < 1$ y $w = 1$, equivale a la clase Lipschitz puntual

$$\Lambda(\delta) = \{f \in L^1_{\text{loc}} : |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\delta \text{ para todo } x, y\}$$

.

- Para $-n < \delta < 0$ y $w = 1$, son espacios de Morrey.

Resultados principales

Acotación para $T^m_{\alpha,\boldsymbol{b}}$

- $0 < \alpha < mn$, T^m_α con núcleo K_α que verifica (1) y (2)
- $0 < \delta < \min\{\gamma, mn - \alpha\}$, $\tilde{\alpha} = \alpha + \delta$, $\vec{p}$ tal que $p > n/\tilde{\alpha}$
- $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ tal que $b_i \in \Lambda(\delta)$ para cada i
- $\tilde{\delta} \leq \delta$ y $(w, \vec{v}) \in \mathbb{H}_m(\vec{p}, \tilde{\alpha}, \tilde{\delta})$ tal que $v_i^{-p_i'} \in \mathrm{RH}_m$ para cada $i \in \mathcal{I}_2$

Entonces existe $C > 0$ tal que

$$\frac{\|w\mathcal{X}_B\|_\infty}{|B|^{1+\tilde{\delta}/n}} \int_B |T^m_{\alpha,\boldsymbol{b}}\vec{f}(x) - (T^m_{\alpha,\boldsymbol{b}}\vec{f})_B|\, dx \leq C \prod_{i=1}^m \|f_i v_i\|_{p_i}$$

para toda bola B y toda $\vec{f}$ tal que $f_i v_i \in L^{p_i}$, $1 \leq i \leq m$

Resultados principales

Acotación para $\mathcal{T}^m_{\alpha,\boldsymbol{b}}$

- $0 < \alpha < mn$, T^m_α con núcleo K_α que verifica (1) y (2)
- $0 < \delta < \min\{\gamma, (mn-\alpha)/m\}$, $\tilde{\alpha} = \alpha + m\delta$, $\vec{p}$ tal que $p > n/\tilde{\alpha}$
- $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ tal que $b_i \in \Lambda(\delta)$ para cada i
- $\tilde{\delta} \le \delta$ y $(w, \vec{v}) \in \mathbb{H}_m(\vec{p}, \tilde{\alpha}, \tilde{\delta})$ tal que $v_i^{-p_i'} \in \mathrm{RH}_m$ para cada $i \in \mathcal{I}_2$

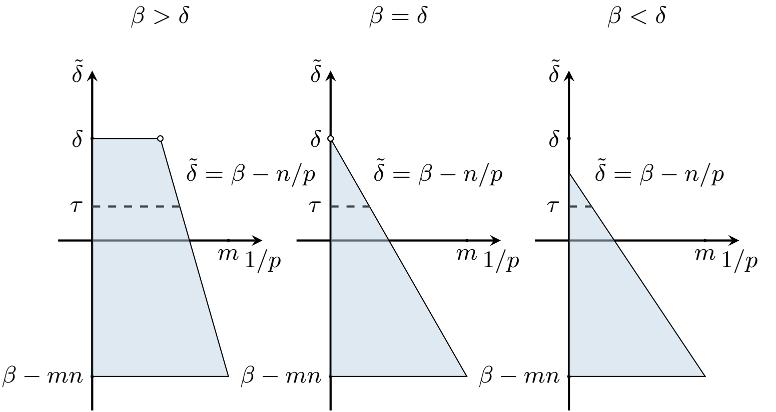
Entonces existe $C > 0$ tal que

$$\frac{\|w\mathcal{X}_B\|_\infty}{|B|^{1+\tilde{\delta}/n}} \int_B |\mathcal{T}^m_{\alpha,\mathbf{b}}\vec{f}(x) - (\mathcal{T}^m_{\alpha,\mathbf{b}}\vec{f})_B|\,dx \le C \prod_{i=1}^m \|f_i v_i\|_{p_i}$$

para toda bola B y toda $\vec{f}$ tal que $f_i v_i \in L^{p_i}$, $1 \le i \le m$

- Acotaciones similares para I^m_α fueron obtenidas en [BPRa]
- Que extiende los resultados del contexto lineal probados en en [PRR]

Regiones óptimas para la existencia de pesos no triviales



MUCHAS GRACIAS

Bibliografía

[BPRa] F. Berra, G. Pradolini y W. Ramos.
Optimal parameters related with continuity properties of the multilinear fractional integral operator between Lebesgue and Lipschitz spaces.
Positivity, 27(2):35, 2023.

[BPRe] F. Berra, G. Pradolini y J. Recchi.
Some extensions of classes involving pair of weights related to the boudedness of multilinear conmutators associated to generalized fractional integral operators
En prensa https://arxiv.org/pdf/2209.14103.pdf, 2022.

[MW1] B. Muckenhoupt and R. Wheeden.
Weighted norm inequalities for fractional integrals.
Trans. Amer. Math. Soc., 192:261–274, 1974.

[Pr] G. Pradolini.
Two-weighted norm inequalities for the fractional integral operator between L^p and Lipschitz spaces.
Comment. Math. (Prace Mat.), 41:147–169, 2001.

[PRR] G. Pradolini, W. Ramos and J. Recchi
On the optimal numerical parameters related with two weighted estimates for commutators of classical operators and extrapolation results
Collectanea Mathematica, 72 (2) 229–259, 2021

[PR] G. Pradolini and J. Recchi.
On optimal parameters involved with two-weighted estimates of commutators of singular and fractional operators with Lipschitz symbols
Czechoslovak Mathematical Journal, 2023.